第5章 不完全信息动态博弈

聂辉华 教授
中国人民大学经济学院
www.niehuihua.com
niehuihua@vip.163.com

5.1 完美贝叶斯均衡

5.1.1 市场进入博弈

现实生活中，多数博弈都是不完全信息动态博弈，比如交朋友。用以前的知识难以分析这类博弈。以改造后的“市场进入博弈”为例。假定有两个时期，两个参与人（在位者和进入者），在位者有两种类型（高成本和低成本），进入者只有一种类型（高成本）。第一期，在位者有三种定价方式（p=4，p=5，p=6）。第二期，进入者观察到在位者的定价策略，更新关于成本的信念，并决定是否进入（新假设）。假定高成本的在位者最佳的垄断定价是 6，低成本的是 5。进一步，假定当在位者是高成本时，进入者进入才有利可图，并且两个厂商进行产量竞争；反之则不进入（合理性）。如图 5－1 所示（张维迎，1996，第 303 页）。

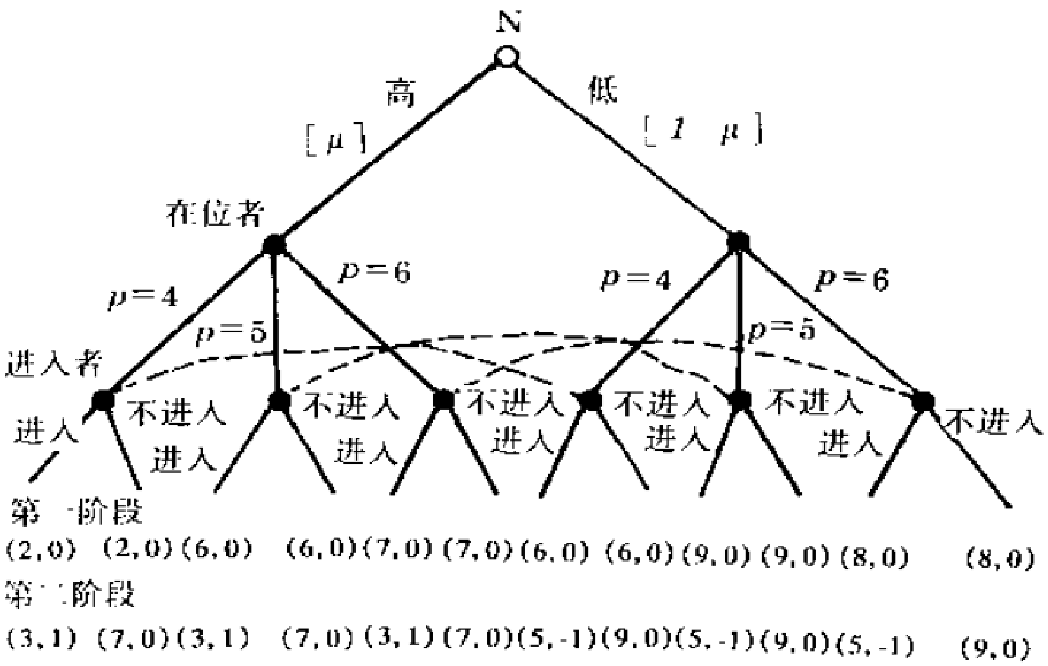

图 5－1 市场进入博弈

提示：注意图中信息集的表示方式。

要得到这个博弈的均衡，使用前面学过的 SPE 是不够的。为什么？因为，整个不完全信息动态博弈就是一个子博弈，没有其他子博弈，所以无法“完美”（refine）。利用静态贝叶斯均衡也不行，因为这里参与人的信念不是外生给定的，而是可以根据第一期的定价信息更新的（动态博弈）。

假如 $\mu < 0.5$，在静态条件下（在位者定价和进入者进入同时发生），（高成本在位者定价 p=6，低成本在位者定价 p=5，进入者不进入）是一个贝叶斯均衡。如果两者概率相等，

进入者无差异。

证明：

进入者进入的收益：$\mu\times1+(1-\mu)\times(-1)=2\mu-1$（高成本时必定价为 6，进入收益为 1；低成本时，必定价为 5，进入收益为－1）

进入者不进入的收益：0

因此，当且仅当$2\mu-1<0\Rightarrow\mu<0.5$时，进入者不进入。

5.1.2 完美贝叶斯均衡定义

问题是，在动态条件下，既然进入者可以观察到在位者的定价行为，从而可以更新自己的信念并制定最优策略，此时在位者会怎么想呢？假如在位者定价为 6（表明自己是高成本厂商），那么进入者一定会进入，从而减少在位者的两期总收益。因此，很容易证明，在位者决不会选择 p=6，不管其真实成本为多少。那么它的最优定价应该是什么呢？要解出这类博弈的均衡，我们必须引入一个新的解——完美贝叶斯均衡（perfect Bayesian equilibrium，PBE）。它是 SPE（取“完美”）和 BE（取“贝叶斯”）的结合。

它要求：

（1）给定其他参与人的信念（belief）和策略，博弈在后续部分的策略是一个（贝叶斯）纳什均衡；

（2）给定博弈到目前为止的历史，参与人在每一个信息集上的信念都是根据贝叶斯法则优化的。

正式地，一个完美贝叶斯均衡策略必须满足

$$s_i^*(s_{-i},\theta_i)\in\arg\max\sum\tilde{p}_i(\theta_{-i}\mid a_{-i}^h)u_i(s_i,s_{-i}^*;\theta_i,\theta_{-i})$$

[注 1] 第一个条件表明它是 SPE 思想的体现。

[注 2] 上述定义与 SPE 的差别在于概率条件依赖于参与人观察到的历史行动，以及对条件概率的贝叶斯更新。这意味着参与人的信念与策略被提到了同等重要的地位。

5.1.3 贝叶斯法则

$$p(a^h,\theta^k)\equiv p(a^h\mid\theta^k)p(\theta^k)\equiv p(\theta^k\mid a^h)p(a^h)$$

$$\Rightarrow p(\theta^k\mid a^h)\equiv\frac{p(a^h\mid\theta^k)p(\theta^k)}{p(a^h)}\equiv\frac{p(a^h\mid\theta^k)p(\theta^k)}{\sum_{j=1}^{k}p(a^h\mid\theta^j)p(\theta^j)}$$

一个形象的比喻：假如世上的“好人”和“坏人”各占一半（先验概率），好人只干“好事”，坏人干好事的概率为 1/4。当我们观察到一个人干了好事时，他是好人的概率为：

$$p(\text{好人}\mid\text{好事})=\frac{p(\text{好事}\mid\text{好人})p(\text{好人})}{p(\text{好事}\mid\text{好人})p(\text{好人})+p(\text{好事}\mid\text{坏人})p(\text{坏人})}$$

$$p(\text{好人}\mid\text{好事})=\frac{\frac{1}{2}\times1}{\frac{1}{2}\times1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}}=\frac{4}{5}$$

5.2 应用 1：市场进入博弈

回到刚才的市场进入博弈。根据垄断定价法则，我们令 $p(6|\mu)=1$，$p(5|1-\mu)=1$或 $p(6|1-\mu)=0$，这里 μ 表示高成本类型，这是外生给定的“信念”。

我们首先证明，不论先验概率 μ 是多少，高成本在位者第一阶段选择 p=6 不是一个 PBE。如果进入者观察到上述定价，那么他的后验信念为：

$$p(\mu|6)=\frac{p(6|\mu)p(\mu)}{p(6|\mu)p(\mu)+p(6|1-\mu)p(1-\mu)}=\frac{\mu}{\mu}=1$$

$$p(1-\mu|5)=\frac{p(5|1-\mu)p(1-\mu)}{p(5|1-\mu)p(1-\mu)+p(5|\mu)p(\mu)}=1$$

这意味着，如果高成本在位者选择 p=6，进入者就一定会进入，这样在位者未贴现的两阶段总利润为 7＋3＝10。但是，如果在位者模仿低成本在位者选择 p=5，进入者一定不会进入（认为对方是低成本者），因此他的总利润为 6＋7＝13>10。因此，上述定价不是一个 PBE。

现在我们考虑 $\mu<\frac{1}{2}$ 的情况。我们将证明，一个 PBE 是：不论高成本还是低成本，在位者都选择 p=5；进入者仅在观察到 p=6 时进入。

先分析高成本在位者，根据前面的分析，他定价 p=5 肯定比 p=6 要好。事实上，如果他定价为 4，进入者也将不会进入，但是他只能得到 2＋7＝9 的利润（过度发射信号）。因此，p=5 是高成本在位者的最佳策略。

对低成本在位者而言，p=5 本来就是垄断最佳价格，而且进入者不会进入（因为 $p(1-\mu|5)=1$），因此他将得到两阶段的最高利润 9＋9＝18。

对进入者来说，$p(\mu|5)=\frac{p(5|\mu)p(\mu)}{p(5|\mu)p(\mu)+p(5|1-\mu)p(1-\mu)}=\frac{1\times\mu}{1\times\mu+(1-\mu)}=\mu$，

因此进入者没有获得任何新的信息。因此，

进入的期望收益为$1\times\mu+(-1)\times(1-\mu)=2\mu-1<0$，小于不进入的收益，因此他不会进入。

[注] $p(5|\mu)=1$体现了进入者与在位者“信念一致”的原则。

上述 PBE 称为“混同均衡”（pooling equilibrium），因为不同类型的参与人选择了相同的行为或契约。

类似地，我们可以证明：如果 $\mu\geq 0.5$，低成本在位者选择 p=4，高成本在位者选择 p=6；进入者如果观察到 p=4 就不进入（$p(\mu|4)=0$），如果观察到 p=6 或 p=5 就进入（$p(\mu|6)=1$ 和 $p(\mu|5)\geq 0.5$），这是一个 PBE。这里，不同类型的参与人选择了不同的行为或契约，因此这是一个分离均衡（separating equilibrium）。分离均衡成立的前提是，它满足激励相容原理，类似于信息甄别模型。

5.3 应用 2：KMRW 模型

考虑一个有限重复博弈的囚徒困境模型。不完全信息可以模型化为某种“非理性”行为，例如使用“针锋相对”策略。如果一方带有一定的非理性特征，那么另一方为了将自己伪装为类似的非理性以便获取长期博弈的好处，双方就都有可能在博弈结束的最后两个阶段之前一直维持一种合作关系——都选择“抵赖”。背后的深刻含义是：如果允许坏人可以“伪善”，也许对整个社会都有好处！

详细的证明可以参考 Kreps、Milgrom、Robterts 和 Wilson 等四人发表在 1982 年 JET 上的两篇论文，俗称“四人帮模型”。它与中国古代传统智慧“大智若愚”、“大巧若拙”是一致的。两个相反的成语：“黔驴技穷”和“呆若木鸡”。在投资方面，“价值投资”的本意是“赚慢钱”，“抱本守拙”。

最后，总结一下博弈论的几个基本解的关系如下（张维迎，1996，382 页）。