第4章 不完全信息静态博弈

聂辉华 教授
中国人民大学经济学院
www.niehuihua.com
niehuihua@vip.163.com

4.1 海萨尼转换和贝叶斯均衡

4.1.1 海萨尼转换

回顾：何谓“不完全信息”？不对称信息、不完全信息与理性人假设并不矛盾。不完全信息静态博弈是附加了概率与预期的完全信息静态博弈，因此贝叶斯均衡是进行概率加权的纳什均衡。

到目前为止，我们总是假定参与人的 payoff 是共同知识。但多数时候我们并不清楚参与人的 payoff，因为我们不知道参与人的 type（类型）。所谓类型，包括所有不是共同知识的**外生**信息，例如成本、质量、性格，甚至“知道与否”，但不是指“做出了什么行动”（内生的），后者属于“不对称信息”。例如图 4－1 的市场进入博弈（张维迎，1996）。请问，该博弈有几个均衡？

		在位者			
进入者		高成本		低成本	
		默许	斗争	默许	斗争
	进入	**40，50**	－10，0	30，80	－10，100
	不进入	0，300	0，300	0，400	**0，400**

图 4－1 市场进入博弈 I

一方面，进入者需要了解在位者的成本类型；另一方面，在位者需要判断进入者是否知道自己的类型。如果参与人有 N 种类型，那么对方就相当于和 N 个人一起博弈，通常认为这是不可解的。海萨尼（Harsanyi，1967-1968）的办法是，引入一个虚拟的参与人“自然”（Nature）来首先赋予不同类型参与人不同概率，这种概率是共同知识（为什么？），但确切的类型却是私人信息。这一方法称为“海萨尼转换”。转换后，图 4－1 可以变成图 4－2。

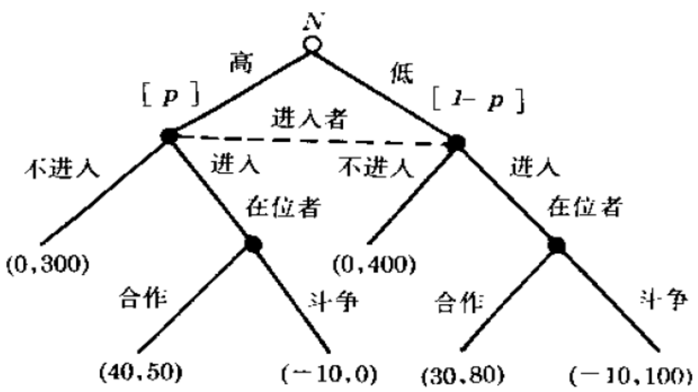


图 4－2 市场进入博弈 II

提问：有无其他画法？

4.1.2 贝叶斯均衡

正式地，用$\theta_i \in \Theta_i$表示参与人i的类型。该类型是i的私人信息，其他参与人只能了解自然赋予的分布函数$P(\theta_1,...\theta_n)$（共同知识）。令$p_i(\theta_{-i}\,|\,\theta_i)$为给定参与人$i$属于类型$\theta_i$的条件下，他拥有的关于其他参与人属于$\theta_{-i}$的后验概率。根据概率论知识，

$$p_i(\theta_{-i}\,|\,\theta_i) = \frac{p(\theta_{-i},\theta_i)}{p(\theta_i)} = \frac{p(\theta_{-i},\theta_i)}{\sum_{-i\in\Theta_{-i}} p(\theta_{-i},\theta_i)}$$

不完全信息博弈也称贝叶斯博弈（Bayesian game），它与完全信息博弈最大的区别在于行动和效用函数是类型依赖的，即$a_i(\theta_i)\in A_i(\theta_i)$和$u_i(a_i,a_{-i};\theta_i,\theta_{-i})$，因此稍微复杂一些。正式地，我们用$G=\{A_1,...,A_n;\theta_1,...,\theta_n;p_1,...,p_n;u_1,...,u_n\}$表示 N 人静态贝叶斯博弈。

时序如图 4－3：

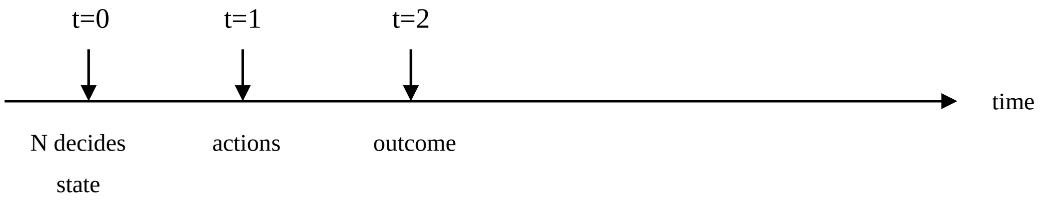


图 4－3 博弈时序

提问：静态贝叶斯博弈和完全信息静态博弈的差别？

（1）如果所有参与人的类型空间都只有一个元素，即$\Theta=\{\theta_i\}$，那么贝叶斯博弈就退化为完全信息静态博弈；（2）如果参与人的类型是完全相关的，那么类型也会成为共同知识。这说明，完全信息静态博弈是贝叶斯博弈的一个特例，好比纯策略纳什均衡是混合策略纳什均衡的一个特例一样。

回顾纳什均衡的定义：$u(\sigma_i^*,\sigma_{-i}^*)\ge u(\sigma_i',\sigma_{-i}^*)$，或者$\sigma_i^*\in\arg\max u(\sigma_i,\sigma_{-i}^*)$。

类似地，我们可以如此定义贝叶斯纳什均衡（Bayesian Nash Equilibrium）：

$$s_i^*(\theta_i)\in\arg\max\sum p_i(\theta_{-i}\,|\,\theta_i)u_i(s_i,s_{-i}^*(\theta_i);\theta_i,\theta_{-i})$$

我们通常假设类型的分布是独立的，那么$p_i(\theta_{-i}\,|\,\theta_i)=p(\theta_{-i})$。但在研究拍卖时，可假设类型（或价值）是相关的。因此，求解贝叶斯均衡时实际上并不需要使用贝叶斯推断，而只是使用期望收益。

文字表述：

贝叶斯纳什均衡：n 人不完全信息静态博弈 $G=\{A_1,\cdots A_n;\theta_1,\cdots,\theta_n;P;u_1,\cdots,u_n\}$ 的纯战略贝叶斯纳什均衡是一个类型依存战略组合 $\{a_i^*(\theta_i)\}_{i=1}^n$，其中每个参与人 i 在给定自己的类型 θ_i 和其他参与人类型依存战略 $a^*_{i}(\theta_{-i})$ 的情况下最大化自己的期望效用函数 v_i。换言之，战略组合 $a^*=(a_1^*(\theta_1),\cdots a_n^*(\theta_n))$ 是一个贝叶斯纳什均衡，如果对于所有的 i，$a_i\in A_i(\theta_i)$，

[注] 与纳什均衡不同的是，在贝叶斯均衡中，即便是纯策略也需要对收益函数取期望，因为任何策略都是类型依赖的。

4.2 应用 I：带有不完全信息的古诺模型

4.2.1 古诺模型：回顾

特点：对称的双寡头【厂商数量】同时【博弈时序】进行产量竞争【内容】。

4.2.2 基本假设

逆需求函数为 $P=a-q_1-q_2$，企业 i 的不变边际成本为 c_i，因此企业 i 的利润函数为

$$\pi_i = q_i(a-q_1-q_2-c_i)\text{，}\quad i=1,2$$

进一步假定 $a=2$，$c_1=1$。

现在引入不完全信息，假设企业 2 的成本有两种可能，以 μ 的概率是低成本 $c_2^L=3/4$，以 $1-\mu$ 的概率是高成本 $c_2^H=5/4$。令 $\mu=1/2$，则两个企业的期望成本相同（若不同？）。上述信息为共同知识。此时，博弈由完全信息静态博弈变成不完全信息静态博弈。

对企业 2 来说，给定企业 1 的成本，它将选择产量以最大化利润函数

$$\begin{aligned}\pi_2 &= q_2(2-q_1^*-q_2-\{3/4,5/4\})\\ &= q_2(t-q_1^*-q_2)\end{aligned}$$

这里，$t=2-3/4=5/4$ 或 $t=2-5/4=3/4$。利润函数对产量 q_2 求导，得到企业 2 的反应函数

$$q_2(q_1^*,t)=\frac{1}{2}(t-q_1^*)$$

具体来说，就是（企业 2 知道自己的成本类型，为什么需要两个方程？）

$$q_2^L = \frac{1}{2}(\frac{5}{4} - q_1^*) \quad （4－1）$$

$$q_2^H = \frac{1}{2}(\frac{3}{4} - q_1^*) \quad （4－2）$$

现在考虑企业 1 的决策。企业 1 不知道企业 2 的真实成本，但是知道成本的分布，因此它的期望利润函数为（类似于混合策略）

$$E\pi_1 = \frac{1}{2}q_1(1 - q_1 - q_2^L) + \frac{1}{2}q_1(1 - q_1 - q_2^H)$$

该函数对产量 q_1 求导，得到企业 1 的反应函数

$$q_1^* = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2}q_2^L - \frac{1}{2}q_2^H) = \frac{1}{2}(1 - Eq_2) \quad （4－3）$$

贝叶斯均衡意味着两个反应函数同时成立，因此联立求解方程组（4－1）到（4－3）。解得：$q_1^* = \frac{1}{3}$，$q_2^L = \frac{11}{24}$，$q_2^H = \frac{5}{24}$（省略了后两者的优化符号）。

比较：如果企业 2 的成本是公开信息，比如 $c_2^L = 3/4$，那么问题回到古诺纳什均衡。两个企业的反应函数为

$q_1^* = \frac{1}{2}(1 - q_2^*)$ 和 $q_2^* = \frac{1}{2}(\frac{5}{4} - q_1^*)$，解得 $q_{1L}^{NE} = \frac{1}{4}$，$q_{2L}^{NE} = \frac{1}{2}$。类似地，当 $c_2^H = 5/4$ 时，$q_{1H}^{NE} = \frac{5}{12}$，$q_{2H}^{NE} = \frac{1}{6}$。

我们感兴趣的是企业 2 的产量变化。易知：$q_{2L}^{NE} > q_2^L$，$q_{2H}^{NE} < q_2^H$。也就是说，当企业 2 是低成本时，它的产量相对于完全信息博弈时减少了；高成本时，产量相对上升了。这说明信息不完全给高成本的企业 2 带来了好处，同时也给低成本的企业 2 带来了坏处，所谓“鱼目混珠”是也。

案例：“吃大锅饭”的弊端。

思考：贝叶斯均衡可以应用于伯川德竞争吗？

4.3 应用 II：逆向选择模型

4.3.1 二级价格歧视

回顾：完全价格歧视、三级价格歧视、二级价格歧视

中国移动公司如何针对商务人士和非商务人士制定不同的手机资费？

保险公司如何针对不同健康状况的人制定保单？

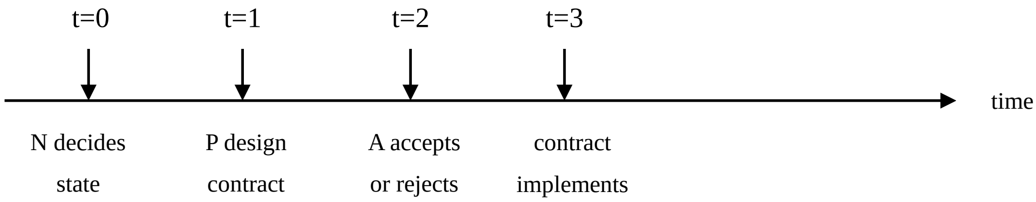
二级价格歧视＝信息甄别（screening）＝逆向选择模型（adverse selection）

4.3.2 逆向选择模型

机制设计的两个必要条件：参与约束（individual rationality，IR），做比不做好；激励相容约束（incentive compatibility，IC），说实话比撒谎好。

时序：

Ex ante adverse selection



正式的数学规划：

$$\underset{T(q)}{Max}\ \beta[T(q_L)-cq_L]+(1-\beta)[T(q_H)-cq_H]$$

s.t. (IR) $\theta_i u(q_i)-T(q_i)\geq \underline{U}$

(IC) $q_i \in \arg\underset{q}{max}\,\theta_i u(q_i)-T(q_i)$ for $i=L,H$

解的结果：（1）让高类型得到信息租金，通过赎买了解其真实类型；（2）攫取低类型的信息租金并扭曲其消费数量，使得高类型缺乏模仿低类型的激励。

举例：全球通和神州行的资费设计。

思考：如何将逆向选择模型的思想应用于解决北京的经济适用房分配？

4.4 贝叶斯博弈与混合策略均衡

4.4.1 混合策略：回顾

在完全信息静态博弈部分，对混合策略的几种解释。

提问：在动态博弈中有没有混合策略？

4.4.2 抓钱博弈

Harsanyi（1973）证明，完全信息下的混合策略均衡可以解释为不完全信息下纯策略均衡的极限。即我们可以把混合策略理解为对参与人类型的不确定性。请看下面这个“抓钱博弈”（grab the dollar），它的实质是“斗鸡博弈”。

		2	
		抓	不抓
1	抓	－1，－1	1，0
	不抓	0，1	0，0

图 4－3 抓钱博弈 I

		2	
		抓	不抓
1	抓	－1，－1	$1+\theta_1$，0
	不抓	0，$1+\theta_2$	0，0

图 4－4 抓钱博弈 II

如图 4－3 所示，该博弈有三个均衡：两个非对称的纯策略纳什均衡（（抓，不抓）和（不抓，抓））和一个混合策略纳什均衡（（1/2，1/2），（1/2，1/2））。现在引入不完

全信息，每个参与人的收益都是类型θ_i的函数，并假定类型服从均匀分布，$\theta_i \sim [-\varepsilon,+\varepsilon]$。如图 4－4。

[注] 此时并未对θ_i具体赋值，因此不能断定是否存在纯策略纳什均衡。

我们可以构造这样一种策略：（1）参与人 1：如果$\theta_1 \ge \theta_1^*$，抓；反之不抓；（2）参与人 2：如果$\theta_2 \ge \theta_2^*$，抓；反之不抓。用 1 表示抓，用 0 表示不抓。那么，任一参与人的期望收益为

$$\pi_i(1) = -1 \times \Pr ob(\theta_j \ge \theta_j^*) + (1+\theta_i) \times \Pr ob(\theta_j < \theta_j^*)$$
$$= -1 \times (1 - \frac{\theta_j^* + \varepsilon}{2\varepsilon}) + (1+\theta_i) \times \frac{\theta_j^* + \varepsilon}{2\varepsilon}$$

[注] 均匀分布函数的性质。$\Pr ob(X \le x) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dt$，当$x \in [-\varepsilon,+\varepsilon]$，$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\varepsilon - (-\varepsilon)} dt = \frac{x+\varepsilon}{2\varepsilon}$。

如果参与人不抓，则其收益为$\pi_i(0) = 0$。利用收益等价法原理，我们有

$$-1 \times (1 - \frac{\theta_j^* + \varepsilon}{2\varepsilon}) + (1+\theta_i) \times \frac{\theta_j^* + \varepsilon}{2\varepsilon} = 0$$

利用均衡下$\theta_i^* = \theta_j^*$，解得$\theta_i^* = \theta_j^* = 0$。因此贝叶斯均衡是：如果$\theta_i \ge 0$，就抓；如果$\theta_i < 0$，就选择不抓。(注意贝叶斯均衡的表示方法与纳什均衡的差别)。从混合策略纳什均衡的角度看，抓（或不抓）的概率是多少呢？当$\varepsilon \to 0$时，利用罗必塔法则，$\frac{\theta_j^* + \varepsilon}{2\varepsilon} \to \frac{1}{2}$。这说明，纯策略贝叶斯均衡收敛为一个完全信息静态博弈的混合策略纳什均衡。